2023.8.26. ジョイントセミナー・方法論分科会シンポジウム『場所的な論理に向けての圏論的可能性』について、主たる論点の整理：司会・提題　浦井 憲（大阪大学）

●【冒頭メモ】虚空の蔵「蔵＝母胎（子宮＝マトリックス＝基盤）」と「真なる知」ということ。或いは「包括的構え（RFSS）≒ 宇宙伎芸（ユクホイ）≒ cosmic epoch（ホワイトヘッド）」ということ。

どこまでも「関係性」として「開く」、という話を明確に数学的に、「圏論」において進めてみようというのがここでのテーマである。そうすると、「関係性」「→」（以下 f とも表す） の、その始と終（前・後、左・右、上・下）への「開け」ということが、話の出発（最も避け難い契機）になる。なお、以下の圏論的記述において、関係と関係の「合成」に関して、基本的には積表現 $\cdot$ を用いるが、特にその「関数」性に注意を払う場合、$\circ$ 記号を用いることがある。（つまり、$g \cdot f$ と書きながら、同時にそれを $f \circ g$ と表すことがある。また、以下でフォント f と f 等は見分けない。）

f

／　　＼

始性　　　　終性　　　　始性：主体性・心的極性・作用性
□f　　　　f□　　　　終性：客体性・物的極性・目的性

ともかく、以下において根源的なものは → であり、その始性と終性というのも、また何らかの関係性として扱われる。（※「関係」とは「継り」であり、「連鎖」であろう。つまり「連鎖」が最初の「避け難い契機」とも言える。そうすると、続いて「合成」の可能性が問われるのは、自然の流れと言えよう。）

より正確に述べると、f は $\Box f$ と f の「合成」として、また f は f と $f\Box$ の「合成」として、「分ける（開く）」ことができると、以下では（**公理** (A1) として）考える。$f\Box$ は $f\triangleright$ とも書く（特にその作用の前後を強調する目的で）。また、$\Box f$ は $\triangleright f$ とも書く。

圏論では、関係性の合成がまた新たな関係性を造るということが基本であり、合成されたものと、それが造る新たな関係性が「（関係性と関係性の間で）等しい＝」という概念は、その最も根源的な概念として、避け難いものである。一方、その（一つの）圏の内において、unique up to isomprphism という意味での $\sim$ で表される同値関係「（以下で定義される identity という関係性としての対象物および morphism の存在というその全体圏に依存した）同値関係」の把握が、目的とされる。（関係に対する「＝等しい」という「全体圏を超越した—絶対的な」述語は、それと明確に区別される。もちろん $\sim$ はそのような絶対的同一性を含めた、緩い意味での同値類概念、reflexive, transitive, symmetric ではある。）以下、厳密な表現で、「関係性」にのみ依存した（objects を前提とせず、全てを morphisms とする形での）圏の公理系を与える。（参照 Freyd and Scedrov 1990）。

(A1) $f = f \circ \triangleright f$ and $f = f\triangleright \circ f$.

(A2) $g \cdot f = f \circ g$ is defined if and only if $\triangleright f = g\triangleright$.

(A3) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

(A4) If $f \circ g$ is defined, then $(f \circ g)\triangleright = f\triangleright$.

(A5) If $f \circ g$ is defined, then $\triangleright(f \circ g) = \triangleright g$.

$\triangleright f$ または $f\triangleright$ の形をしたものを identity と呼ぶ。この形をしたものを e と書くと、これは任意の g に対して、$e \circ g$ または $g \circ e$ が定義される限り、(A2) 条件と (A1) 条件を通じて、$e \circ g = g$ かつ $g \circ e = g$ を成立させる。また、(A1) と (A5) より $\triangleright f = \triangleright(\triangleright f)$ である。このことは、再度 (A1) より $\triangleright f = \triangleright f \circ \triangleright f$ を意味する。故にまた (A2) を通じて、

$$(\triangleright f)\triangleright = \triangleright f, \tag{43}$$

である。同様に (A1) と (A4) から $f\triangleright = (f\triangleright)\triangleright$ であり、再度 (A1) から $f\triangleright \circ f\triangleright = f\triangleright$ 更に (A2) を通じて、

$$\triangleright(f\triangleright) = f\triangleright, \tag{44}$$

を得る（Freyd and Scedrov 1990 では (A4) および (A5) の書き方が異なるので、上記 2 条件は導出されるのではなく公理となっている）。まとめると $e \circ e = e$ であり $e = \triangleright e = e\triangleright$ であるようなもの（自身が自身の始性であり終性であるようなものを identity 自性と呼んでいる）ということである。

> **※ ここで注意すべきことは、identity ということが、それ自体ではなく、あくまでも「始性」あるいは「終性」という他との「関係性」において、すなわちあくまでも「関係性」の「等しさ」が先行するところとして、規定されているということである。**一方、とある水準では「関係性」と見られているものを、対象物として、取り扱うことも、しばしば行われることである。例えば集合の圏 $\mathcal{S}ets$ において、一つの関数 $f : A \to B$ の状況を、その subcategory (Diagram) と見ながら、その subcategory (Diagram) 上の cone (Goldblatt 1979) を考え、その cone の limit を、関数 f のグラフとして、圏 $\mathcal{S}ets$ における identity と（改めて）見る、といったことである。

一つの圏において、Identity と identity の間には、同値性が（isomorphism という形で）定義される。言うまでもなく、これはその identity が属する全体 Category に依存する reflexive かつ transitive かつ symmetric な関係である。

上記の合成（圏の公理系）では　$\triangleright f \cdot f$（関数的に書くならば $f \circ \triangleright f$）と f との関係を $=$ で取り扱い、公理と見做したが、もし f という関係性を identity として俯瞰し得るようなカテゴリーの全体の捉え直しの上で、これを $\sim$ 的な同値性として捉え直すことができるならば、$f \cdot f\triangleright \overset{\text{def}}{=} f\triangleright \circ f$ と f の間のような、圏論における（定義に相当している $f \cdot g \overset{\text{def}}{=} g \circ f$ のような記述は残すとしても）$=$ 関係を、常にそのときに論理的基底となっている全体カテゴリーの中で、内部化することも可能となってくるであろう [8] 。たとえば、「f の**始性**」とは、そのような論理的基底を成す「全体圏」での identity 下（これは全体が変われば変わってくるものであり、それを $\blacktriangleright$ で表す）において、「f **を固定し、そこで** $g \cdot f = f \circ g$ **が定義される任意の** g **のようなものについて、必ず up to** $\sim$ **で一意的に、**h **という** $\blacktriangleright g$ **という identity から** $\blacktriangleright f$ **という identity への大きな圏での morphism** h **が unique に定まって（もし全体圏に変化が無ければ、その unique 性を保証しているのは** $g\triangleright = \triangleright f$ **という合成の必要十分条件そのものであるが）、**$g = h \cdot \blacktriangleright f$ **となるようなもの**」として、特徴付けることが考えられる。

> **（普遍写像性質）**：上のような特徴付けは「普遍写像性質」であるが、特にここでは、一般的に「identity」というものが関係性と関係性あるいは対象物と対象物の間の等しさから定義されるのではなく、逆に関係性の等しさというものを「新たに」定義する道具ともなり得るということに、注意すべきである。このような形で出てくる Identity（一意性）とは、今のところ、一意的と見えているものも（あくまでもそれが現状の圏（カテゴリー）における始性および終性に過ぎないのであり、更に別の圏（カテゴリー）の見地から、同じ f が解釈される場合、異なったものになる可能性、つまり（今のところは目をつぶっているに過ぎない）「一意性」のゆらぎを、捉えるための道具（構え）になっていると言える。

[8] ちなみに、始関係および終関係を、Bourbaki 1939- における Initial Structure あるいは Final Structure のようなものとして捉えることは、そもそもがこれが identity （対象物）を定義する、極めて根源的な「構造の構造」であることから、妥当ではなかろう。

このような道具（構え）を用いて、f の「始性」および「終性」ということを更に「開い」ていくということを考えたいのである。「f の始性」については（上に述べたことの正式な形式的記述になるが）、「$f \circ g$ **が定義される場合に、unique に h が定まって、**

$$g = (\blacktriangleright f \circ h) \circ \triangleright g = \blacktriangleright f \circ (h \circ \triangleright g), \tag{45}$$

の可換性が満たされること、と述べることができよう（下図参照）。この $\blacktriangleright f$（下図では ▲ｆ）が、$\triangleright f$（下図では △ｆ）と同一（定義の意味で）である場合には、下図 i は id（$\triangleright f$ で良い）であるが、そうでない場合には、上から下への何らかの morphisum である。すなわち、

∃！h
∀△g　→　▲ｆ

g＼　　／i

始性　ｆ
△ｆ　→

を成立させるものとして、新たに（例えば大きな全体圏として）$\blacktriangleright f$ が $\triangleright f$ に変わって、その圏での始性として定義されることも有り得る、ということである（その意味で f の始性というものに、幅が生じているという状況が捉えられるということである）。

> **(Example):** 普通に △ｆ および ▲ｆ を集合、▲ｆ と △ｆ の違いは、$a \in \triangleright f$ が $a' \in \blacktriangleright f$ になっているということだけとする。これは、例えばかつて a と考えられていたものが、現在（科学の進歩 etc. で）$a' \in \blacktriangleright f$ と考えることの方が、より一層の豊かな「関係性」ネットワークの構築につながることが明らかになった（いわば、▲ｆという新たな圏論では、$a' = a$ という公理が追加されている）ような場合。

このように考える場合、新たな（$\blacktriangleright f$ の）世界では、任意の（△ｆと接続可能な） g を、上記の可換性の下で一意的な h と読み変えることで、$\triangleright f$ と $\blacktriangleright f$ の $\sim$ 同値性（unique up to isomorphism 性）とともに、f の始性（identity）という identity を $\blacktriangleright f$ に置き換えることが可能となる。また、そのことは、従来の「関係性」ネットワークの豊かさを担保し、同時に、いっそう新た（豊富）な「関係性」ネットワーク（世界）構築が、可能となる。

この新たな f の始性（$\blacktriangleright f$ の）世界では、実のところ $\blacktriangleright f$ は（universal mapping property から）unique up to isomorphism で定まっているに過ぎず、完全に一意的とは言えない。故に、実際に、これを f の始性として定義するには、そのような（isomprphic な）特定の一つを、選択する必要がある。しかし一度それを選択すれば、上図における △ｆ の位置に ▲ｆ が来ることになり、またその定義がなされる限りにおいて $\forall g,\ \blacktriangleright f \circ g = g$ となって、自らの始性と終性が等しくなる。（自分と自分の合成が、自分と等しくなるような、始性と終性が自分そのものであるような関係性が「自」性 self-ness であり identity であるという、むしろそのことが、identity という特性を、ここでは定めることになる。）

このように、全ての「自」性が、「今のところ単に見分けがつかない」というだけの意味の「一意性（unique up to isomorphisms）」と「普遍写像性質」から、定義されるということであり、ありとあらゆる概念（その「自」性）は、「今のところ見分けられない」ものを判定しようとする「行為・作用（普遍写像性という構え）」と、不可分のものとして、定まることになるということである。

（問い１）以上のように、**「自」性**、あるいは **identity** を更に関係性として「開く」ということの意義について（圏論をもって「學の方法」について語る可能性を追求する上で）如何に思われるか。

（問い２）そのような圏論の展開において、上のように**普遍写像性**を（いわば「**概念化**」の）基礎とすることについては、如何でしょうか。

（問い３）このような圏論の展開の先に、従来の集合論との関わり、すなわち**表現**性（集合論という世界にこれを表現すること）の問題（例えば米田レンマとの関わり等）は、いかなるものになるべきか。（つまり、公理的集合論＆一階の述語論理とここでの圏論の関係は、どのように補完的たり得るか。）

（以下、cone のリミットと表現性に続く。）

REFERENCES

Bourbaki, N. (1939-): *Eléments de Mathématique.* Hermann, Paris. English Translation: Springer-Verlag.

Freyd, P. J. and Scedrov, A. (1990): *Categories, Allegories.* North-Holland, Amsterdam.

Goldblatt, R. (1979): *Topoi: The Categorial Analysis of Logic.* North-Holland, Amsterdam. Revised edition, Dover Books on Mathematics, 2006.

Lang, S. (1995): *Differential and Riemannian Manifolds.* Springer-Verlag, New York.

Schaefer, H. H. (1971): *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, New York/Berlin.

Shilov, G. E. and Gurevich, B. L. (1977): *Ingegral, Measure & Derivative: A Unified Approach.* Dover Publications, Inc., New York. (Revised English Edition, Translated and Edited by Richard A. Silverman).

Urai, K. (2010): *Fixed Points and Economic Equilibria* vol. 5 of *Series of Mathematical Economics and Game Theory.* World Scientific Publishing Company, New Jersey/London/Singapore.