Uzawa, Solow and Aggregation

堀江進也，入谷純，安岡匡也

$Hiya$, (報告者：入谷 純)

数理経済学会 夏期ジョイントセミナー

August 26, 2023

問題の所在

- n 財モデルと m 財モデル $(n > m)$ の関係は？

  n 財モデル消費財は第 1〜k 財、m 財消費財は第 1 財だけのとき，

  n 財モデルの消費財の集計が m 財モデルの第 **1** 財になるか？

  鍵となるもの：集計 $\Rightarrow$ 財の集計と集計財価格
- 本稿：より具体的に
  二部門モデルは一部門モデルより一般的（を含む）か？
  二財をまとめて一集計財にする $\Rightarrow$ 集計生産関数と集計財価格
- 先行研究 土居，藤井，堀江，入谷，佐藤，安岡 (Dfhisy(2021)) の二部門コブ・ダグラス生産関数 モデル

  集計財価格：${p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}$，集計生産関数：$\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{F_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}$
- Dfhisy モデルを一般的新古典派生産関数で書き Uzawa モデルを Solow モデルに 集計する：本稿の課題

- 財の集計における難問
  Cambridge Controversies から受け継がれた課題
  複数の生産関数を集計生産関数に集計できるか？
  $\Rightarrow$ 膨大な議論がなされる
- その議論における前提：生産技術に関する情報だけから集計生産関数を構成する
- 議論における結論：生産関数の集計は例外的である
  Robinson(1953-54) 異質資本, 集計は **No**
  Felipe and Fisher(2003) servey 同質異質に拘わらず 集計は **No**
- 本稿の立場　上述の前提を離れる
  (i) 総要素需要を生成する「集計」生産関数を探す
  その際に，**(ii)** 需給バランスを参照する

Uzawa Two-Sector definition

- Uzawa-economy $((K,L),(F_i)_{i=1}^2,(\alpha_i)_{i=1}^2)$
- 設定 新古典派生産関数 $F_i(K_i,L_i), i=1,2$
  (K,L)：本源的生産要素の初期保有
  $\max\ p_iF_i(K_i,L_i)-K_i-\omega L_i,\quad i=1,2$
  α_1,α_2：支出係数（ソローの $s,1-s$）
- 一時均衡

$$
\begin{aligned}
\text{財}\quad &:\ \alpha_i(K+\omega L)=p_iF_i(K_i,L_i), i=1,2\\
\text{生産要素}&:\ K_1+K_2=K,\quad L_1+L_2=L
\end{aligned}
$$

Uzawa Two-Sector how to solve

- $\max\ p_i F_i(K_i, L_i) - K_i - \omega L_i \Rightarrow k_i(\omega),\ p_i(\omega),\ \ i = 1, 2$

  $\alpha_i(k+\omega)L = p_i f_i(k_i(\omega))L_i \quad \Rightarrow \quad L_i(\omega),\ \ i = 1, 2$

  $K_i(\omega) = k_i(\omega)L_i(\omega),\ \ i = 1, 2$

- $L_1(\omega) + L_2(\omega) = L$：均衡解 ω^*

  宇沢経済の均衡の一意性 $\Longrightarrow$ 動学経路,

  本稿の目的：一時均衡の集計

積分操作

- 最大化の限界条件より：$\dfrac{1}{\omega + k_i(\omega)} = \dfrac{f_i'(k_i(\omega))}{f_i(k_i(\omega))}$ は恒等式

$$\frac{1 + k_i'(\omega)}{\omega + k_i(\omega)} = \frac{f_i'(k_i(\omega))}{f_i(k(\omega))} + \frac{f_i'(k_i(\omega))k_i'(\omega)}{f_i(k_i(\omega))}$$

$$\log(\omega + k_i(\omega)) = \int \frac{f_i'(k_i(\omega))}{f_i(k(\omega))} d\omega + \log f_i(k_i(\omega))$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\omega + k_i(\omega)} d\omega &= \int \frac{f_i'(k_i(\omega))}{f_i(k(\omega))} d\omega \\ &= \log(\omega + k_i(\omega)) - \log f_i(k_i(\omega))\end{aligned}$$

宇沢一時均衡から推定されること

- 宇沢一時均衡について，均衡の性質より

$$\prod_{i=1}^{2}(p_i^*)^{\alpha_i}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{F_i(K_i^*,L_i^*)}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\alpha_i(K+\omega^* L)}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}$$

$$= K + \omega^* L$$

(分配国民所得)

$$= \sum_{i=1}^{2}(K_i^* + \omega^* L_i^*)$$

(生産国民所得)

$$= \sum_{i=1}^{2} p_i^* F_i(K_i^*, L_i^*)$$

$\Longrightarrow$ 集計財価格、集計生産関数への予想

集計の定義

- 準備

  経済 $((K,L),(F_i)_{i=1}^2,(\alpha_i)_{i=1}^2)$: Uzawa-economy

  価格: $(\omega,(p_i(\omega))_{i=1}^2)$, $\omega>0$

  個別需要: $K_i(\omega), L_i(\omega), i=1,2,$

  総需要: $K(\omega)=\sum_{i=1}^2 K_i(\omega),\ L(\omega)=\sum_{i=1}^2 L_i(\omega)$

  均衡: $((\omega^*,(p_i^*)_{i=1,}^2),(Y_i^*,K_i^*,L_i^*)_{i=1}^2),\ p_i^*=p_i(\omega^*),$

  $$(K_i^*,L_i^*)=(K_i(\omega^*),L_i(\omega^*)),\quad Y_i^*=F_i(K_i^*,L_i^*)$$

集計の定義 つづき

- 関数 $\boldsymbol{p(\omega)}$ と $\boldsymbol{F(\tilde{K},\tilde{L})}$ が存在し，$\forall\omega > \mathbf{0}$ について

  (a) $K(\omega), L(\omega)$ は $\max p(\omega)F(\tilde{K},\tilde{L}) - \tilde{K} - \omega\tilde{L}$ の解

  (b) $p(\omega)F(K(\omega), L(\omega)) = \sum_{i=1}^{2} p_i(\omega)F_i(K_i(\omega), L_i(\omega))$

  をみたす $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{(p(\omega), F(\tilde{K},\tilde{L}))}$ **aggregate pair** への要請

- 宇沢経済の均衡がソロー経済 $\boldsymbol{((K,L),F)}$ の均衡に集計される

  (c) $K_1^* + K_2^* = K,\ \ L_1^* + L_2^* = L,\ Y = F(K,L),$
  $K + \omega^* L = p(\omega^*)Y$

  (d) $((\omega^*, p(\omega^*)), (Y, K, L))$ は Solow の一時均衡：
  (K,L) は $\max p^* F(\tilde{K},\tilde{L}) - \tilde{K} - \omega^*\tilde{L}$ の解
  $K(\omega^*) = K,\ \ L(\omega^*) = L, Y = F(K,L)$

コブダグラス経済の例

Doi, Fujii, Horie, Iritani, Sato and Yasuoka (2021) の貢献

- コブダグラス経済

$$F_i(K_i, L_i) = A_i {K_i}^{\theta_i} {L_i}^{1-\theta_i},$$

- 集計経済

$$\begin{aligned}
\theta &= \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2, \\
A &= \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{A_i {\theta_i}^{\theta_i} (1-\theta_i)^{1-\theta_i}}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}} \right)^{\alpha_i} \\
F(K, L) &= AK^\theta L^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

定義を満たすものがあれば

(a), **(b)** を満たす集計財価格，集計生産関数 $p(\omega)$ $F(\tilde{K},\tilde{L})$ があれば

- 宇沢均衡が一意なら，**(b)** は

$$p(\omega)F(K(\omega),L(\omega))=\sum_{i=1}^{2}p_i(\omega)F_i(K_i(\omega),L_i(\omega)).$$

(a) より
$$\frac{1}{\omega+k(\omega)}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i}{\omega+k_i(\omega)}$$

定理 1
$$\begin{cases}\text{微分方程式を解き} & F(K,L)=\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{F_i(K_i^*,L_i^*)}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\\ \textbf{(b)}\text{ が}\omega^*\text{で成立} & \Rightarrow\ p^*=\prod_{i=1}^{2}(p_i^*)^{\alpha_i}\end{cases}$$

課題：F は関数か？凹関数か？一次同次か？

新しい表現

- $((K, L), (F_i)_{i=1}^2, (\alpha_i)_{i=1}^2)$：宇沢経済，人工的な問題

$$\max_{y_i, K_i, L_i} \left(\frac{y_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{y_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2} \text{ subject to}$$
$$\begin{cases} K_1 + K_2 \leqq K,\ L_1 + L_2 \leqq L, \\ y_i \leqq F_i(K_i, L_i),\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Baqaee and Farfi (2019) の貢献：**Aggregator** D_0 を提唱
これより集計生産関数を提案

D_0 の具体形は何か？　集計財の価格は？
集計に整合性があるのか？

本報告、D_0 の具体形に $\prod_{i=1}^2 (y_i/\alpha_i)^{\alpha_i}$ を採用

同値定理，一意性

- 定理 **2**：人工的な問題の解と宇沢経済の一時均衡は同値
- 定理 **3**：人工的な問題の解は一意である

$$p(\omega) = (p_1(\omega))^{\alpha_1} (p_2(\omega))^{\alpha_2}$$
$$F(K, L) = \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{F_i(K_i^*, L_i^*)}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i}$$

well defined, これを定義とする

- 定理 **4, 5**：F は一次同次，増加的，凹関数である
- 課題：得られた $(p(\omega), F(K, L))$ は **(a),(b)** を満たすか？

(b) をみたすか？

- 定理 6 自明な均衡の存在 $((K,L),(F_i)_{i=1}^2,(\alpha_i)_{i=1}^2)$：宇沢経済

  任意の $\omega>0$ について,
  価格と配分の組 $((\omega,(p_i(\omega))_{i=1}^2),(Y_i(\omega),K_i(\omega),L_i(\omega))_{i=1}^2)$ は
  新宇沢経済 $((\bar{\boldsymbol{K}},\bar{\boldsymbol{L}}),(F_i)_{i=1}^2,(\alpha_i)_{i=1}^2)$ の一時均衡である
  ここで $(\bar{K},\bar{L})=(K(\omega),L(\omega))$
- 宇沢一時均衡の性質,

$$p^*F(K,L)=\prod_{i=1}^2(p_i^*)^{\alpha_i}\prod_{i=1}^2\left(\frac{F_i(K_i^*,L_i^*)}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}=\sum_{i=1}^2 p_i^*F_i(k_i^*,L_i^*)$$

$\Longrightarrow$ **(b) が均衡で成立**　　自明な均衡でも成立,

$$p(\omega)F(K,L)=\sum_{i=1}^2 p_i(\omega)F_i(k_i(\omega),L_i(\omega))$$

$\Longrightarrow$ **(b) が成立**

条件 (a)

- **(a)** は局所的に成立する
  補助定理 **4**：(ω^*, p^*) において、$K(\omega^*), L(\omega^*)$ は最大化の解
  次を示すことが可能

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K,L) = \frac{1}{p^*},\ \frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = \frac{\omega^*}{p^*}$$

- 自明な均衡に対しても同じことが成立

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K(\omega),L(\omega)) = \frac{1}{p(\omega)},\ \frac{\partial F}{\partial L}(K(\omega),L(\omega)) = \frac{\omega}{p(\omega)}$$

$\Longrightarrow$ **(a)** が成立

- **(c), (d)** の成立は易しい　集計可能性定理 **7, 8** の成立

quod erat demonstrandum

残された課題

- 1 稲田条件を外せるか
- 2 異質資本と集計
- 3 部門数を増やせるか
- 4 **Uzawa** 二部門動学は **Solow** 動学に集計可能か
- 5 中間生産物と集計
- 6 一部門経済を二部門経済に分解できるか
- 7 部門 **TFP** と集計 **TFP** の間の関係
- 8 一次同次性, 支出係数，産業