非線形積分の収束定理とその統合化

河邊　淳　(信州大学工学部)

講演概要

非加法的測度は数学的には空集合で零となる単調増加な集合関数である．非加法的測度とその積算概念としての非線形積分は古くから断片的には研究されていたが，1961 年の Ellsberg [4] の壺の実験により，その重要性が再認識された．この心理実験によれば，不完全な情報下での人間行動を説明するには，非加法的測度とその非線形な積算概念である Choquet 積分や Sugeno 積分を土台とする期待効用理論の構築が必要となる．このように，非加法的測度論と非線形積分論は，工学や社会科学分野の研究者からの切実な要請に基づき，従来の測度論から “加法性” を，積分論から “線形性” の呪縛を取り払い，現実社会の問題に適切に対応可能な理論構成を目的として登場した新理論で，数学的には『測度論の非加法化，積分論の非線形化，さらには両理論の精密化』を目指す理論と考えられている．

測度論の研究者の多くは，測度に加法性を仮定しなければ実りある理論は得られないと考えていた．しかし，1974 年の Sugeno [18] による工学的視点，Dobrakov [3] による数学的視点からの基礎研究を出発点として，その後の多くの数学者，工学者，数理経済学者らによる理論・応用両面にわたる多岐の研究の結果，測度論の様々な重要定理が実用的なより弱い加法性や連続性のもとで成立することがわかってきた．それらの研究は早くも 1990 年代前半には Wang & Klir [19,20]，Denneberg [2]，Pap [13] らの専門書にまとめられた．

この講演では，まず基本的な用語や記法を準備したのち，可測関数列の収束に関する Lebesgue の定理，Riesz の定理，法則収束定理，Egoroff の定理や，測度の正則性に関する Lusin の定理，Alexandroff の定理を題材にして，これら測度論における重要定理が非加法的測度に対しても成立するために非加法的測度に課すべき幾つかの必要十分条件を紹介する．

一方，非加法的測度の積算概念としての非線形積分は，期待効用理論や主観的評価問題，測度論・積分論の精密化の観点から重要であるが，測度の非加法性に起因して，Lebesgue 流の積分の定義をそのまま適用しただけでは合理的な積分とはならない．また，数学理論では 2 項演算は加法と乗法が基本であるが，工学や社会科学分野ではこれに加えて，束演算である上限と下限がよく用いられる．それゆえ非加法的測度論の応用分野では，加法と乗法で定義される Choquet 積分，上限と下限で定義される Sugeno 積分，上限と乗法で定義される Shilkret 積分などから，具体的な問題ごとに適切な積分を取捨選択して積算概念として利用している．これら非線形積分を実用化し，様々な分野への応用を目指すには，非線形積分に対しても単調収束定理や Vitali の収束定理などの積分収束定理の確立が必須

である．実際，工学分野では，積分収束定理は積分による集約過程 (aggregation process) の頑健性 (robustness)，安定性 (stability)，非カオス性 (non-chaos) を表すと考えられている．しかし，非線形積分に対する積分収束定理は，従来は各積分ごとに個別に議論されきた．それゆえ，定理の定式化や証明方法も各積分固有の定義や性質に深く依存していて，見通しのよい理論構成ではなかった．この講演の後半では，一連の論文 [5–12] に基づき，これら非線形積分の収束定理を統合化する一つの方法論を紹介する．

まずは代表的な非線形積分である Choquet 積分 [1, 15]，Šipoš 積分 [17]，Sugeno 積分 [14, 18]，Shilkret 積分 [16, 21] を紹介する．次にこれら非線形積分を非加法的測度の空間と非負可測関数の空間の直積空間上で定義された非線形の積分汎関数とみなすことにより，上記の非線形積分が共通してもつ性質を積分汎関数の言葉で定式化する．この共通的性質の中でもとりわけ重要な性質は積分汎関数の摂動性であり，被積分関数 f と，非加法的測度 μ が定める f の減少分布関数 $G_\mu(f) := \mu(\{f > t\})$ をそれぞれ微少に変化させたときの積分値の微少な変化を線形的にとらえるために利用される．最後に，積分汎関数に対する諸性質，特に積分汎関数の摂動性を用いることにより，個別の非線形積分に対してはすでに一部確立されている単調収束定理，有界収束定理，Vitali の収束定理などの積分収束定理や，位相空間上の測度論で有名な Portmanteau 定理を，積分汎関数を用いて統合化する．

参考文献

[1] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 5, 131–295 (1953–54).

[2] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[3] I. Dobrakov, On submeasures I, Dissertaiones Math. (Rozprawy Mat.), 112, 1–35 (1974).

[4] D. Ellsberg, Risk, ambiguity, and the Savage axioms, Quart. J. Economics, 75, 643–669 (1961).

[5] J. Kawabe, Metrizability of the Lévy topology on the space of nonadditive measures on metric spaces, Fuzzy Sets Syst., 204, 93–105 (2012).

[6] J. Kawabe, Weak convergence of nonadditive measures defined by Choquet and Sugeno integrals, in: Banach and function spaces IV (M. Kato and L. Maligranda, eds.), Yokohama Publishers, 2014, 63–79.

[7] J. Kawabe, The bounded convergence in measure theorem for nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets Syst., 271, 31–42 (2015).

[8] J. Kawabe, Weak convergence of nonadditive measures based on nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets and Syst., 289, 1–15 (2016).

[9] J. Kawabe, A unified approach to the monotone convergence theorem for nonlinear integrals, Fuzzy Sets Syst., 304, 1–19 (2016).

[10] J. Kawabe, The monotone convergence theorems for nonlinear integrals on a topological space, Linear and Nonlinear Analysis, 2, 281–300 (2016).

[11] J. Kawabe, The Vitali type theorem for the Choquet integral, submitted for publication.

[12] J. Kawabe, The Vitali type theorem for nonlinear integral functionals, in preparation.

[13] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.

[14] D. Ralescu, G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., 75, 562–570 (1980).

[15] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, Proc. Am. Math. Soc., 97, 255-261 (1986).
[16] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math., 33, 109–116 (1971).
[17] J. Šipoš, Integral with respect to a pre-measure, Math. Slovaca, 29, 141–155 (1979).
[18] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974.
[19] Z. Wang and G. J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 1992.
[20] Z. Wang and G. J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, New York, 2009.
[21] Ru Huai Zhao, (N) fuzzy integral, J. Math. Res. Exposition, 1, 55–72 (1981) (in Chinese).