近畿地区 数理経済学 ジョイント・セミナー (春季)
―『経済学の方法と数理』― 2014.3.26 於大阪大学

報告概要

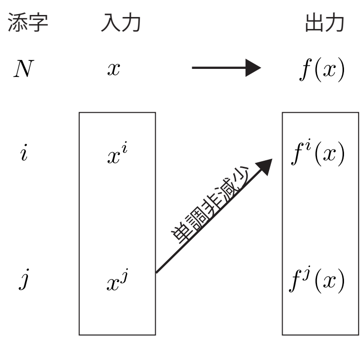
A Unified Approach to Optimization Problems via Metzler Functions

増澤 拓也

1. メッツラー関数とは

メッツラー関数[1]とは、n 次元のベクトルから n 次元ベクトルへの関数で、添字の i と j とが異なるとき、関数値の第 i 座標 $f^i(x)$ が第 j 変数 x^j に関して単調非減少なものと定義される (図 1)。メッツラー関数は、単調関数の自然な拡張と捉えることも可能であり、応用性が広くわかりやすい概念である。その典型的な例は、粗代替性をもつ超過需要関

図 1: メッツラー関数



数である。粗代替性をもつ超過需要関数にしたがえば、第 i 財の超過需要は、ことなる第 j 財の価格に関し単調に増加する。

このようなメッツラー関数に関する数学理論は、古くから一般均衡分析において役立てられてきた。いわゆるヒックス条件に関する Metzler (1945 *Econometrica*) の研究が元になって、粗代替経済において競争均衡が大域的に安定になることが明らかにされたのは、20 世紀における大きな成果である。レオンチェフの投入算出分析に関する稼働可能性の条件、国際貿易理論も主要な応用範囲である。

二階堂副包「経済のための線型数学」(1961, 培風館)、同「現代経済学の数学的方法」(1960, 岩波書店) では、いずれもメッツラー行列に関して多くのページを割いている。一方、近年の代表的なミクロ経済学の教科書 Mascollel, Whinstone and Green「*Microeconomic Theory*」(1995, Oxford Univ Press) において、メッツラー行列は 1000 ページ近い大著のわずか数ページを占めるにすぎない。

しかし、メッツラー行列への明確な言及は減っても、実際にはメッツラー行列の応用研究は行われていた。1970 年代以降展開されてきた、n 次元から 1 次元への優モジュラー関数 (劣モジュラー関数) は、微分がメッツラー関数となる関数である。その応用である、優モジュラーゲームにおいて強調されてきた性質は、個別の利得関数がすべて優モジュラー関数であるとき、最適反応関数がメッツラー関数になることにほかならない[2]。

本報告では、メッツラー関数が簡明な理論を持ち、応用が十分にあり、優モジュラー関数よりも射程が広いことをしめす。

[1] メッツラー関数の名称は、経済学者 L. Metzler (1913-1980) にちなんだものであるメッツラー関数の符号を逆転させたものは、数理最適化の分野で Z 関数と呼ばれている

[2] 優モジュラー関数の経済学での展開をリードした諸文献においては、メッツラー行列に関する既存研究への詳しい言及はなく、そのつながりは明らかにされてこなかった。Bulow, Geanakoplos, and Klemperer (1985, *Journal of Political Economy*), Topkis "*Supermodularity and Complementarity*"(1998, Oxford Univ Press) などを参照せよ。また、Milgrom and Shannon (1994, *Econometrica*) における粗代替経済への言及も参照せよ。

2. 基本的な定式化とアルゴリズム

添字の集合を $\{1, 2, \ldots, n\}$ とし、各変数 x^i の定義域を実数の有界閉集合、a^i を実数としたとき、ベクトル $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ に関する 条件

$$f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \geq a^i \text{ or } x^i = 0 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

を考えよう。このとき、条件をみたすベクトルのなかで、**最大元** を求める問題を最大保障問題と呼ぶ。最大保障問題の最大元は必ず存在し、それは単純なアルゴリズムで見つけることができる。実際、関数の定義域が有限の連続した自然数であるとき、そのアルゴリズムは次のようになる。

単調アルゴリズム

Masuzawa (2008 Int. Jour. Game Theory)

1. $\boldsymbol{x}^i := \max X^i$ for all $i \in N$;
2. $\boldsymbol{S} := \{i | u^i(\boldsymbol{x}) < a^i \text{ and } \boldsymbol{x}^i > \min X^i\}$;
3. if $\boldsymbol{S} = \emptyset$, then stop;
4. $\boldsymbol{x}^i := \boldsymbol{x}^i - 1$ for all $i \in \boldsymbol{S}$;
5. Jump to 2.

関数 f が超過需要関数であるとき、$a^i = 0$ とおけば最大保証問題は競争均衡価格を定義し、単調アルゴリズムはいわゆるオークションアルゴリズムになっていること、すなわち、ある種の模索過程になっていることがみてとれる。実際、最大元の存在定理は、Kuga (1965 *Econometrica*) によって初めて考察された、粗代替経済の均衡の存在の別証明を与える。

3. 新しい応用例

本報告では、メッツラー関数の新たな応用を示す。

最短経路問題は、2 つの地点の最短距離を求める問題である。一つのルートが最短経路であることの必要十分条件は、任意の迂回ルートよりも距離が短いことである。一般に任意の辺の最短迂回距離は、他の辺の距離づけにたいして、単調非減少である。したがって、各辺の距離づけに対して、最短迂回距離を与える関数はメッツラー関数である。そして、最短経路は最大補償問題で特徴づけられ、ベルマン=フォードのアルゴリズムがこれを解く単調アルゴリズムになる。

二部マッチングは、企業への労働者の就職など、2 つの集団間でのマッチングを問題にするものである。それぞれの現行の相手よりも、互いを高く評価するようなペアが存在するとき、現行のマッチングは不安定であるとされる。企業の選択関数にたいする**代替可能性**とよばれる想定は、応募者の集合にたいして非採用者を定める関数がメッツラー関数であることを意味している。安定的なマッチングは、最大保障問題で特徴づけられ、ゲールとシャプレーのアルゴリズムはその単調アルゴリズムになる。

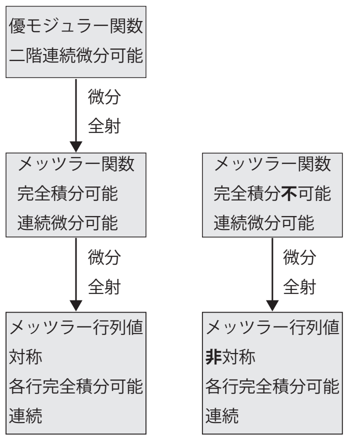
単記移譲式の選挙は、票のとりすぎによる同士討ちの可能性を排除する選挙方法である。そこでは、有権者は候補者に対するランキングを投票し、当選ライン以上に票のとりすぎた候補は、ランキングにしたがって他の候補に票を移譲する。ある候補の票の移譲率をふやすと他の候補の得票が増加するので、各候補の移譲率から得票への関数はメッツラー関数である。最終的な票の移譲率をきめるアルゴリズムは、単調アルゴリズムである。

懲罰優位関係をもつゲームとは、利得関数がメッツラー関数になるような状況である。利得関数は、全プレーヤーの行動のリストに対して、各プレーヤーの利得を与える関数である。この形式で表されるのは、クールノーの寡占市場モデル、公共財の供給モデルなどがある。このゲームの利得ベクトルがコアに属するか否かを決定する問題は、最大保障問題になる (Masuzawa , 2008, *Int.Jour. Game Theory*)。

4. 優モジュラー関数との関係

優モジュラー関数の微分がメッツラー関数になるという関係はよく知られている。しかし、与えられたメッツラー関数のヤコビ行列が対称でないときは、その関数は優モジュラー関数の微分とはならない (図 2)。

図 2: 微分とメッツラー関数



本報告では、微分にかわって、提携型ゲームの構成という点に注目する。まず、利得の和に注目する TU 提携型の枠組みでは、戦略型ゲーム $u^N : X^N \to \Re^N$ にたいして、次のように定義される α-TU ゲーム $v^\alpha : 2^N \to \Re$ をとりあげる。

$$v^\alpha(S) := \max_{x^S} \min_{x^{N\setminus S}} \sum_{i \in S} u^i(x^S, x^{N\setminus S}).$$

このとき、**任意の優モジュラー関数は適当なメッツラー関数 $u^N : X^N \to \Re^N$ の α-TU ゲームとして表現される** (図 3 左側矢印)。しかし、任意のメッツラー関数から構成した α-TU ゲームが、優モジュラーになるとは限らないことをしめす。つまり、優モジュラー性は、メッツラー関数を完全に特徴づけることはできない。

利得の交換を許さない NTU 提携型の枠組みでは、次のように定義される α-NTU ゲーム $V^\alpha : 2^N \to\to \Re^N$ をとりあげる。

$$V^\alpha(S) := \cup^{x^S} \cap^{x^{N\setminus S}} \{a^S \in \Re^S : a^i \le u^i(x^S, x^{N\setminus S})\}.$$

メッツラー関数は、つぎのように定義される強い優加法性という性質で特徴づけることができる。任意の $S, T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ と $x^{S\cup T} \in \Re^{S\cup T}$ にたいして、

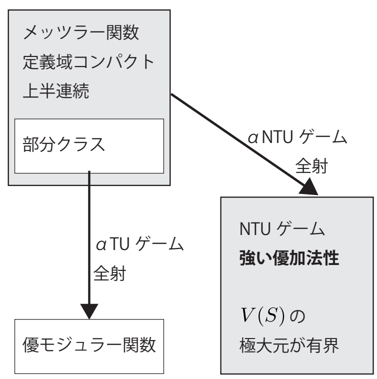
$$x^S \in V^\alpha(S) \text{ かつ } x^T \in V^\alpha(T)$$
$$\text{ならば } x^{S\cup T} \in V^\alpha(S \cup T).$$

すなわち、次の事実がなりたつ (図 3 を参照)。

(1) 上半連続でコンパクトな定義域をもつメッツラー関数の α-NTU ゲームは、強い優加法性をもち、各値 $V(S)$ の極大元の集合が有界な NTU ゲームになる。

(2) 強い優加法性をもち、各値 $V(S)$ の極大元の集合が有界になる NTU ゲームは、なんらかの上半連続でコンパクトな定義域をもつメッツラー関数の α-NTU ゲームになる。

図 3: 提携型ゲームとメッツラー関数



(この頁にて了)