

確率最適制御としての Monge-Kantorovich 問題

北海道大学大学院理学研究院数学部門、三上敏夫

最適輸送問題の原点は、フランスの G. Monge がパリ王立科学アカデミーで 1781 年に提唱した「砂山をある場所からある場所に移動する最適な（一番楽な）方法は何か？」という問題であろう。これは、Monge の問題と言われている。20 世紀に入って、この問題は、L.V. Kantorovich により数学的に取り扱い易いように拡張され、現在、Monge-Kantorovich 問題（以下、MKP）として知られている（Kantorovich はこの問題に関連した研究でノーベル経済学賞を受賞している）。MKP から、Monge-Ampère 方程式の研究が始まった。また、MKP の偏微分方程式、確率論の極限定理、確率測度に関する対数ソボレフ不等式、画像処理等への応用、Riemann 多様体上やウィナー空間上での MKP、無限次元空間上の幾何学と MKP の研究等もあり、MKP を中心として、様々な研究が爆発的に行われている。

この講演では、まず、Monge の問題とそれへの Kantorovich によるアプローチを紹介する。特に、重要な役割を果たす Duality Theorem を紹介し、それによる MKP へのアプローチを解説する。これは、Monge が問題を提唱して以来、実に、215 年後の 1996 年の Gangbo と McCann の論文による。また、空間次元が 1 次元の場合の MKP の解法にも触れる。

次に、確率最適制御問題として、MKP を考える。まず、1 ステップ確率最適制御問題と考えることにより、MKP の Duality Theorem の簡単な証明を与える。更に、雑音のある場合の MKP として、MKP の確率最適制御版を考える。特に、Duality Theorem とそのゼロ雑音極限による MKP へのアプローチ、また、一般化されたネルソンの問題への応用を考えたい。